TD 10 : Primitives, intégrales Indications

Techniques d'intégration

1 ★★☆ (*En passant par une primitive*) En déterminant une primitive, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-3x^2}dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2x+3}{x-1}dx$

5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

6) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

Utiliser les formules de primitivation classiques telles que $\displaystyle\int u'e^u = e^u$. Parfois, il faudra aussi faire des réécritures du type $+1-1$ ou $\dfrac{1}{1}$.

2 ★★☆ (*Intégration par parties*) Calculer les intégrales suivantes par une IPP :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \arctan x\, dx \qquad \mathcal{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(4x)\, dx$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx \qquad \mathcal{I}_4 = \int_0^{\ln 2} (3x+1)^2 e^{-4x}\, dx$$

Il faut deux fonctions pour une IPP. S'il n'y a qu'une seule fonction, la seconde fonction peut être prise comme étant $x \mapsto 1$.

3 ★★☆ (*Changement de variables*) En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$\displaystyle\mathcal{I}_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ en posant $u = \sqrt{x}$

$\displaystyle\mathcal{I}_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ en posant $z = \sqrt{x-2}$

$\displaystyle\mathcal{I}_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t = \tan u$

$\displaystyle\mathcal{I}_4 = \int_0^{\frac{e-e^{-1}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ en posant $x = \operatorname{sh} t$

$\displaystyle\mathcal{I}_5 = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ à vous de trouver

$\displaystyle\mathcal{I}_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ à vous de trouver

Pour trouver le bon changement de variable, il faut (quitte à faire des réécritures), identifier une fonction $u = \varphi(x)$ et faire en sorte que $u'(x) = \varphi'(x)$ soit en facteur de dx.

4 ★★☆ (*Intégrales de fractions rationnelles*) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2-4x+4}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$

3) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{8x^2+50}$

Suivre la méthode du cours.

5 ★★☆ (*Équations et intégrales*)

1) On pose $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \operatorname{sh} x\, dx$. Faire deux intégrations par parties pour obtenir une équation sur $\mathcal{I}$. Calculer $\mathcal{I}$.
2) Pour tout $x > 1$, on pose $\mathcal{I}(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\, dt$. Par la même méthode, calculer $\mathcal{I}(x)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ sur $\left]1, +\infty\right[$.

1) Obtenir une équation vérifiée par $\mathcal{I}$ après les deux IPP.

2) Une fois $\mathcal{I}(x)$ calculé, utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

Primitives

6 ★★ (*Trouver une primitive*) Déterminer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes. On pourra notamment passer par l'écriture $\int^x f(t)dt$ et éventuellement faire des changements de variables du type $u = \varphi(t)$.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$
2) $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$
3) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$
4) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$
5) $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$
6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{4x}$
7) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
8) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
9) $x \mapsto \sin(2x)\cos^2 x$
10) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2)$

Ne pas hésiter à passer par l'écriture $\int^x f(t)dt$ et à faire un changement de variable, notamment $u = 2t$ pour simplifier le calcul de primitive.

7 ★★ (*Trouver toutes les primitives*) Déterminer *toutes* les primitives des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$
2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
3) $h : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$

Le TFA permet de trouver une primitive sur tout intervalle où les fonctions f, g ou h sont définies.

Règles de Bioche

8 ★★☆ (*Règles de Bioche*) En utilisant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$
2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt$
3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}dx$

Il faut se baser sur la partie “Compléments” du chapitre 10 pour trouver le bon changement de variable.

9 ★★ En posant $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$
2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}$

En posant $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx$ et donc en renversant la relation, on obtient :

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

À vous de jouer

10 ★★ (*Calcul d'intégrales*) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{1-x^2}dx$
2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta$
3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\cos^5 x\,dx$
5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$
6) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$
7) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^3 x\,dx$
8) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}\sin x\,dx$
9) $\displaystyle\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$
10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^8 x\tan x\,dx$
11) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Se référer aux différentes méthodes à la fin du poly de cours.

11 ★★☆ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_a^b \frac{dt}{t-\alpha}$$

Séparer partie réelle et partie imaginaire

12 ★★☆ (*Intégrales de Wallis*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3) En déduire la valeur de I_n.

1) C'est un calcul direct
2) Écrire $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ puis faire une intégration par parties judicieuses pour exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et I_{n+2}
3) Trouver une formule par la question 2, puis la démontrer par récurrence.

13 ★★★ Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Faire un changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$.